CALCULATRICE INTERDITE

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par f_n la fonction suivante :

$$f_n \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{n+k}}{n+k} \end{array} \right.$$

PARTIE A : Etude de la suite $(U_n) = (f_n(1))$.

1. Montrer que (U_n) est croissante et majorée ; que peut-on en déduire ?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

3. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ln(2)$.

RTIE B : Etude des variations de f_n.

1. Montrer que $f_n'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{x^n(1-x^n)}{1-x} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ n & \text{si} \quad x = 1 \end{array} \right.$
2. Montrer que, si n est un entier pair, on a :

$$f_n'(x) = x^n(1+x)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{n-2})$$

3. En déduire les variations de f_n et le nombre de solutions de $f_n(x) = 0$ (on distinguera deux cas : n pair, puis n impair).

PARTIE C : Etude de la suite $(f_n(x))$, où x est un élément fixé de $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que, pour $0 \leq x \leq 1$, on a $x^n \leq f_n'(x) \leq nx^n$.
2. Montrer que, pour $x > 1$, on a $nx^n \leq f_n'(x)$.

   En remarquant que $f_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n'(t)dt$, trouver, suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}_+$, la limite de $f_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

PARTIE D : Etude de $S_n(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} f_p(x)$ pour $x \in [0, 1[$.

1. Vérifier que $S_n'(x) = \dfrac{x(1-x^n)(1-x^{n+1})}{(1-x)^2(1+x)}$.
2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{(1-t)^2(1+t)}dt = 0$.
3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x)$.
4. Déterminer les trois réels a, b, c tels que : $\dfrac{t}{(1-t)^2(1+t)} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{(1-t)^2} + \dfrac{c}{1+t}$.
5. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{(1-t)^2(1+t)}dt$ et conclure.