On considère, pour tout entier n, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}\, dx$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels a, b, c tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\,\varepsilon(n) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Etudier la monotonie de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

   En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

6. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
7. Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
8. Donner alors les valeurs de a, b, c.