On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \geq 0; \quad \forall n \geq 1,\ u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$$

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n \geq \sqrt{n}$.

2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)$.

   (b) En déduire que pour tout entier n, $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$, puis que la suite $\left(\frac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

   (c) Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0, puis en remarquant que, pour tout entier n non nul, $1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$, en déduire un équivalent de u_n en $+\infty$.

3. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$. En s'aidant d'une expression conjuguée, montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite L que l'on précisera.

4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - u_{n-1})$.
   Justifier alors qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier n, si $n \geq N_0$ alors $u_n \geq u_{n-1} - \frac{1}{2}$.
   Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

5. Ecrire en Maple une procédure ayant pour nom *suite* pour donnée un entier n qui calcule et affiche le terme d'indice n de la suite lorsque $u_0 = 1$.