CONCOURS 1995

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

PROBLEME 1

Les parties II et III sont indépendantes et utilisent les résultats établis à la partie I.

Notations: une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I, dont la dérivée f' est continue sur I.

PARTIE I

1. On définit la fonction φ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par: $\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$.

   (a) i. Donner le développement limité de φ au voisinage de 0 à l'ordre 4.

   ii. En déduire que φ est continue et dérivable en 0. Préciser $\varphi'(0)$.

   (b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (c) Soit la fonction ψ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par: $\psi(t) = \frac{t}{\sin t}$ si $t \neq 0$ et $\psi(0) = 1$.

   Montrer que ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Préciser $\psi'(0)$.

2. Soient a et b réels tels que $a < b$. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

   Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que:

$$(1) \qquad \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt \quad \text{tend vers 0 lorsque } \lambda \text{ tend vers } +\infty$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^\times$. On définit S_n sur $[0, \pi]$ par: $S_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)$.

   (a) i. Montrer, *sans récurrence*, que:

$$(2) \qquad \forall t \in \left]0, \pi\right[, \quad S_n(t) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$$

   ii. Calculer $S_n(0)$ et $S_n(\pi)$.

   (b) Calculer la valeur de l'intégrale $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$.

PARTIE II

1. (a) Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin(2n+1)t\,dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   (b) En déduire la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. (a) i. Vérifier que la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

   On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par: $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

   ii. Comparer $F\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$et I_n.

   (b) i. Soit x réel, $x \geqslant \dfrac{\pi}{2}$. Justifier l'existence de $n \in \mathbb{N}$ (dépendant de x) tel que: $(2n+1)\dfrac{\pi}{2} \leqslant x < (2n+3)\dfrac{\pi}{2}$.

   On note $\alpha(x) = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$.

   ii. Montrer que $\displaystyle\int_{\alpha(x)}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

   (c) En déduire que $F(x)$ admet une limite ℓ si x tend vers $+\infty$. Préciser ℓ.

3. (a) Soient x et y réels, tels que $y > x > 0$. Montrer que: $\left|\displaystyle\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leqslant \dfrac{2}{x}$. (On effectuera une intégration par parties).

   (b) En déduire que: $\forall x > 0, \quad |\ell - F(x)| \leqslant \dfrac{2}{x}$.

PARTIE III

1. (a) Déterminer deux réels α et β, indépendants de n, tels que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}.$$

   (α et β sont désormais ainsi fixés).

   (b) En déduire que $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) S_n\left(\frac{t}{2}\right)\,dt$ est un réel indépendant de n, que l'on précisera.

   (c) On définit la fonction h sur $]0, \pi]$ par: $h(t) = \dfrac{(\alpha t + \beta t^2)}{\sin(\frac{t}{2})}$.

   Montrer que h se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

2. On définit les suites $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $(n \geqslant 1)$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$ $(n \geqslant 0)$.

   (a) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donner sa limite.

   (b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.