PROBLEME I

Soit (u_n) une suite de réels non nuls, on lui associe la suite (p_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \prod_{p=1}^{n} u_p = u_1 u_2 \ldots\ldots u_n$$

On dit que le produit (p_n) converge si et seulement si la suite (p_n) admet une limite finie non nulle.
Sinon on dit que le produit (p_n) diverge.

PREMIERE PARTIE

I - 1 En considérant le quotient $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ montrer que, pour que le produit (p_n) converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 1.

I - 2 Soit $p_n = \prod_{p=1}^{n}(1+\frac{1}{p})$

Montrer que : $\forall n \geq 1,\ p_n = n+1$. Quelle est la nature du produit (p_n) ?

I - 3 Soient un réel a différent de $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $p_n = \prod_{p=1}^{n} \cos\frac{a}{2^p}$.

Pour tout entier naturel n non nul, calculer $p_n \sin\frac{a}{2^n}$ en déduire que le produit (p_n) converge et donner la limite de la suite (p_n).

DEUXIEME PARTIE

II - 1 Soit (p_n) un produit associé à une suite (u_n) qui converge vers 1.

II - 1a Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que : $\forall n \geq n_0,\ u_n > 0$.

II - 1b On pose $S_n = \sum_{p=n_0}^{n} \ln(u_p)$.

Montrer que la convergence de la suite (S_n) équivaut à la convergence du produit (p_n).

Lorsque (S_n) converge vers ℓ donner la limite de la suite (p_n) en fonction de ℓ.

II - 2 Soit $p_n = \prod_{p=1}^{n} \sqrt[p]{p}$ et soit $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p}$.

II - 2a Montrer que : $\forall p \geq 3, \ \int_p^{p+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{\ln p}{p}$.

II - 2b En déduire la nature de la suite (S_n) et du produit (p_n) .

TROISIEME PARTIE

III - 1 Soit $p_n = \prod_{p=1}^{n} (1 + v_p)$ où (v_n) est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

On pose $S'_n = \sum_{p=1}^{n} v_p$.

III - 1a Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(1+x) < x$.

III - 1b Montrer que la suite (S'_n) est croissante.

III - 1c Montrer que si la suite (S'_n) converge, alors le produit (p_n) converge.

III - 2 Déduire de la question I - 2 la limite de la suite (S'_n) définie par $S'_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

III - 3 Soit $p_n = \prod_{p=1}^{n} (1 + a^{2^p})$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

III - 3a Que dire de la nature du produit (p_n) lorsque $a \geq 1$?

III - 3b On suppose $a \in \left]0,1\right[$

III -3bi Montrer que le produit (p_n) converge.

III - 3bii Pour tout entier naturel n non nul, calculer $(1 - a^2)p_n$ et en déduire la limite de la suite (p_n) .