Exercice 1.

1. Calculer les coefficients de Fourier associés à la périodisée f de la fonction $x \mapsto |x|$.
2. En déduire que pour $x \in [-\pi, \pi]$,

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos\big((2p+1)x\big)}{(2p+1)^2},$$

3. En déduire

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

puis que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 2. Soient f, g deux fonctions 2π–périodiques continues. On note

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,g(y)\,dy.$$

1. Montrer que $f * g$ est continue 2π–périodique.
2. Montrer que si, de plus, f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $f * g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$. Que peut-on dire si f est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$?
3. Calculer les coefficients de Fourier de $f * g$ en fonction des coefficents de Fourier de f et de g.
4. Définissons f sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ et 0 sinon. Calculer $h = f * f$ et calculer les coefficients de Fourier de h.