Partie A :

1) Un petit calcul nous donne $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{2(2n+1)(n+1)} \geq 0$ .On en déduit donc que (U_n) est croissante.

(U_n) étant croissante et positive, on a donc la majoration suivant : $\mathrm{U_n} \leq n \times \dfrac{1}{n+n} = \dfrac{1}{2}$.

(U_n) est donc croissante et majorée. Elle converge.

2) C'est une inégalité classique. 2 méthodes sont possibles. Une longue et peu formatrice à savoir l'étude de fonctions. L'autre est plus intéressante.

Nous allons utiliser le théorème des accroissements finis.
La fonction logarithme népérien est continue sur R donc aussi sur $[x; x+1]$ et est dérivable sur $]x; x+1[$.

$\exists c \in \,]x; x+1[\, / \ln(x+1) - \ln(x) = \dfrac{1}{c}(x+1-x) = \dfrac{1}{c}$.

Or $c \in \,]x; x+1[$ donc $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{c} \leq \dfrac{1}{x}$.

On en déduit donc que $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$, puis le résultat demandé en appliquant l'inégalité pour x=n.

3) De l'inégalité précédente, on peut en déduit que $\dfrac{1}{n+k+1} \leq \ln(n+k+1) - \ln(n+k) \leq \dfrac{1}{n+k}$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} = f_n(1) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}$.

Aussi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) = \ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$

On en déduit donc que $f_n(1) - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2n+1} \leq \ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) \leq f_n(1)$

Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \ln(2)$, on en déduit par passage à la limite dans l'inégalité précédente le résultat voulu.

Partie B :

1) $f'_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{n+k-1} = x^n \sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

- Si $x \neq 1$, $f'_n(x) = x^n \times \dfrac{1-x^n}{1-x}$
- Si $x = 1$, $f'_n(x) = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{\text{n fois}} = n$

2) $x^n(1+x)(1+x^2+\ldots+x^{n-2}) = x^n(1+x^2+\ldots+x^{n-2}+x+x^3+\ldots+x^{n-1}) = x^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k = f'_n(x)$

3) • Si n est pair, alors $f'_n(x) = \underbrace{x^n}_{>0}(1+x)\underbrace{(1+x^2+\ldots+x^{n-2})}_{>0}$.

On a $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{n+k}}{n+k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^{2n}}{2n}$ et $f_n(x) \underset{-\infty}{\sim} \dfrac{x^{2n}}{2n}$.On en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{f_n}(x) = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{f_n}(x) = +\infty$

Aussi, $f_n(-1)=\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{(-1)^{n+2}}{n+2}+...+\frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1}+\frac{(-1)^{2n}}{2n}=\underbrace{\frac{-1}{n+1}+\frac{1}{n+2}}_{<0}+\underbrace{...}_{<0}+\underbrace{\frac{-1}{2n-1}+\frac{1}{2n}}_{<0}$ donc $f_n(-1)<0$.

Nous obtenons donc le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_n(-1)<0$	$\nearrow$	$+\infty$

Clairement, l'équation $f_n(x)=0$ admet 2 solutions.

- Si n est impair, on utilise le fait que $f'_n(x)=x^n\times\frac{1-x^n}{1-x}$.

Le signe de f'_n dépend donc de celui de x. On en déduit donc le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

L'équation $f_n(x)=0$ admet donc une seule solution.

Partie C :

1) On a $0\le x\le 1$ donc $\forall k\in[1;n-1], 0\le x^k\le 1$. On en déduit donc que $1\le 1+x+...+x^{n-1}\le n$ d'où $x^n\le \underbrace{x^n(1+x+...+x^{n-1})}_{f'_n(x)}\le nx^n$.

2) Clairement, $x>1\Rightarrow 1+x+...+x^{n-1}\ge n$. On a donc $x^n(1+x+...+x^{n-1})\ge nx^n$ d'où $f'_n(x)\ge nx^n$

Comme $f_n(0)=0$, on peut écrire ; $f_n(x)=\int_0^x f'_n(t)dt$.

- Si $x=1$, alors d'après la partie A, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(1)=\ln(2)$

- Si $0\le x<1$, alors on a l'inégalité : $\int_0^x t^n dt\le f_n(x)\le\int_0^x nt^n dt$ d'où $\frac{x^{n+1}}{n+1}\le f_n(x)\le\frac{n}{n+1}x^{n+1}$.

Par passage à la limite dans l'inégalité, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0$

- Si $x>1$, alors on a : $f_n(x)\ge\int_0^x nt^n dt$ d'où $f_n(x)\ge\frac{n}{n+1}x^{n+1}$.

Par passage à la limite, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=+\infty$

Partie D :

1) On a $S'_n(x)=\sum_{p=1}^{n}x^p\frac{1-x^p}{1-x}, x\in[0;1[$ donc $S'_n(x)=\frac{1}{1-x}(\sum_{p=1}^{n}x^p-\sum_{p=1}^{n}x^{2p})=\frac{1}{1-x}(x\sum_{p=0}^{n-1}x^p-x^2\sum_{p=0}^{n-1}x^{2p})$

Or $\sum_{p=0}^{n-1}x^p=\frac{1-x^n}{1-x}$ et $\sum_{p=0}^{n-1}x^{2p}=\frac{1-x^{2n}}{1-x^2}=\frac{1-x^{2n}}{(1-x)(1+x)}$ d'où le résultat après simplification.

2) $t\le x\Rightarrow(1-t)^2\ge(1-x)^2$. On a donc $0\le\int_0^x\frac{t^n}{(1-t)^2(1+t)}\le\int_0^x\frac{t^n}{(1-x)^2}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)^2}$.

Par passage à la limite, on en déduit le résultat voulu.

3) Comme $S_n(0)=0$, on a $S_n(x)=\int_0^x S'_n(t)dt=\int_0^x\frac{t(1-t^n)(1-t^{n+1})}{(1-t)^2(1+t)}dt=\int_0^x\frac{t-t^{n+1}-t^{n+2}+t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt$.

On en déduit que $S_n(x)=\int_0^x\frac{t}{(1-t)^2(1+t)}dt-\int_0^x\frac{t^{n+1}}{(1-t)^2(1+t)}dt-\int_0^x\frac{t^{n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt+\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt.$

La question précédente permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\int_0^x\frac{t}{(1-t)^2(1+t)}dt$

4) C'est une décomposition en éléments simples classique. On trouve $a=-\frac{1}{4}, b=\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{4}$.

5) A partir de la décomposition, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\int_0^x\frac{t}{(1-t)^2(1+t)}dt=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2}$.