Partie I :

1) (a) i) On a $\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + o(t^6)$ donc $\frac{1}{\sin(t)} = \frac{1}{t} \times \frac{1}{1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} + o(t^5)}$.

En utilisant le fait que $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + o(t^2)$, on en déduit que $\frac{1}{\sin(t)} = \frac{1}{t} \times (1 + \frac{t^2}{6} + \frac{7t^4}{360} + o(t^5))$.

Ainsi, $\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} = -\frac{t}{6} - \frac{7t^3}{360} + o(t^4))$. Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit que $\varphi(t) = -\frac{t}{6} - \frac{7t^3}{360} + o(t^4))$.

ii) φ admet un développement limité à l'ordre 0 en 0. Elle est donc continue en 0.

φ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Elle est donc dérivable en 0 et $\varphi'(0) = -\frac{1}{6}$.

(b) Clairement, φ est de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$. D'après la question précédente, φ est continue et dérivable en 0. Montrons que φ' est continue en 0.

$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}, \varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}$.

On a $\sin^2(t) = t^2(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2))^2 = t^2(1 - \frac{t^2}{3} + o(t^2))$.

On en déduit que $\frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} = \frac{1}{t^2} \times \frac{1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)}{1 - \frac{t^2}{3} + o(t^2)} = \frac{1}{t^2} \times (1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2))$ d'où $-\frac{1}{t^2} + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} = -\frac{1}{6} + o(1)$.

Ainsi $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \varphi'(t) = -\frac{1}{6} = \varphi'(0)$ donc φ' est continue en 0 d'où le résultat.

(c) On a $\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}, \psi(t) = 1 - t\varphi(t)$. Cette égalité est trivialement vérifiée en 0 donc

$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \psi(t) = 1 - t\varphi(t)$.

On en déduit que ψ est C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\psi'(t) = -\varphi(t) - t\varphi'(t)$.

En particulier, pour $t = 0$, on a $\psi'(0) = 0$.

2) Une intégration par parties nous donne :

$$0 \leq \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)dt\right| = \left|\left[-\frac{g(t)\cos(\lambda t)}{\lambda}\right]_a^b + \int_a^b \frac{g'(t)\cos(\lambda t)}{\lambda} dt\right| \leq \frac{|g(a)| + |g(b)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b |g'(t)|dt$$

Par passage à la limite, on en déduit le résultat voulu.

3) (a) i) La parité de la fonction cosinus nous permet d'écrire :

$$S_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) + \sum_{k=-n}^{-1} \cos(2kt) = \sum_{k=0}^{n} \cos(2kt) + \sum_{k=-n}^{-1} \cos(2kt) = \sum_{k=-n}^{-n} \cos(2kt)$$

Or $\cos(2kt) = \mathrm{Re}(e^{i2kt})$ d'où $S_n(t) = \mathrm{Re}(\sum_{k=-n}^{n} e^{i2kt})$.

On a $\sum_{k=-n}^{n} e^{i2kt} = e^{-i2nt} \times \frac{1-e^{i2t(2n+1)}}{1-e^{i2t}} = \frac{e^{-i2nt}}{e^{it}} \times e^{it(2n+1)} \times \frac{e^{-it(2n+1)} - e^{it(2n+1)}}{e^{-it} - e^{it}} = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$

Le résultat en découle immédiatement.

ii) On a $S_n(0) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 2n$ et $S_n(\pi) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 2n$

(b) $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S_n(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)\right] dt = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kt)dt = \frac{\pi}{2}$

Partie II :

1) (a) φ étant C^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, la question 2 de la partie I nous donne $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin((2n+1)t)dt = 0$

(b) On a $\frac{\sin((2n+1)t)}{t} \underset{0}{\sim} (2n+1)$ donc il n'y a pas de problème en 0 au niveau de l'intégrale.

On a $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)})\sin((2n+1)t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin((2n+1)t)dt + \frac{\pi}{2}$

D'après la question précédente, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$

2) (a) i) f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ car $\frac{\sin(t)}{t} \underset{0}{\sim} 1$

ii) On a $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$. En posant $u = (2n+1)t$, on obtient $I_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u} du = F((2n+1)\frac{\pi}{2})$.

(b) i) Si $x \geq \frac{\pi}{2}$, alors $\frac{1}{2}(\frac{2}{\pi}x - 1) \geq 0$. Soit $n = E(\frac{1}{2}(\frac{2}{\pi}x - 1)) \geq 0$. On a alors $n \leq \frac{1}{2}(\frac{2}{\pi}x - 1) < n+1$ puis le résultat en effectuant quelques calculs.

ii) $\left|\int_{\alpha(x)}^{x} \frac{\sin(t)}{t} dt\right| \leq \int_{\alpha(x)}^{x} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \leq \int_{\alpha(x)}^{x} \frac{1}{t} dt \leq \int_{\alpha(x)}^{x} \frac{1}{\alpha(x)} dt = \frac{x - \alpha(x)}{\alpha(x)}$

Or $x - \alpha(x) \leq \pi$ et $x - \pi \leq \alpha(x)$ d'où $0 \leq \left|\int_{\alpha(x)}^{x} \frac{\sin(t)}{t} dt\right| \leq \frac{\pi}{x - \pi}$.

Par passage à la limite lorsque x tend vers $+\infty$, on obtient le résultat voulu.

(c) On a $0 \leq \left|F(x) - \frac{\pi}{2}\right| \leq |F(x) - F(\alpha(x))| + \left|F(\alpha(x)) - \frac{\pi}{2}\right| = \left|\int_{\alpha(x)}^{x} \frac{\sin(t)}{t} dt\right| + \left|F(\alpha(x)) - \frac{\pi}{2}\right|$

Du fait que $I_n = F(\alpha(x))$ et par passage à la limite lorsque x tend vers $+\infty$, on obtient $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$

3) (a) Une intégration par parties nous donne :

$\left|\int_x^y \frac{\sin(t)}{t} dt\right| = \left|\left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_x^y - \int_x^y \frac{\cos(t)}{t^2} dt\right| \leq \left|\frac{\cos(x)}{x} - \frac{\cos(y)}{y}\right| + \left|\int_x^y \frac{\cos(t)}{t^2} dt\right| \leq \left|\frac{\cos(x)}{x} - \frac{\cos(y)}{y}\right| + \left|\int_x^y \frac{1}{t^2} dt\right| \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

d'où le résultat.

(b) Soit $x > 0$. $\forall y > x$, $|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y \frac{\sin(t)}{t} dt\right| \leq \frac{2}{x}$. En faisant tendre y vers $+\infty$, on obtient :

$\forall x > 0, |l - F(x)| \leq \frac{2}{x}$

Partie III :

1) (a) Une double intégration par parties nous donne :

$\int_0^{\pi}(\alpha t+\beta t^2)\cos(nt)dt=\frac{1}{n^2}((-1)^n(\alpha+2\beta\pi)-\alpha)$.

α et β sont solutions du problème lorsque : $\begin{cases}\alpha+2\pi\beta=0\\-\alpha=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=\frac{1}{2\pi}\end{cases}$

(b) $\forall k\in[[1;n]],\int_0^{\pi}(\alpha t+\beta t^2)\cos(kt)dt=\frac{1}{k^2}$ d'où $\int_0^{\pi}(\alpha t+\beta t^2)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)dt=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

On en déduit que $\int_0^{\pi}(\alpha t+\beta t^2)(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kt))dt=\int_0^{\pi}(\alpha t+\beta t^2)dt+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

Ainsi, $\int_0^{\pi}(\alpha t+\beta t^2)S_n(\frac{t}{2})dt=\alpha\frac{\pi^2}{2}+\beta\frac{\pi^3}{3}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

On en déduit que $2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\int_0^{\pi}(\alpha t+\beta t^2)S_n(\frac{t}{2})dt=\frac{\pi^2}{3}$

(c) On $\forall t\in]0;\pi],h(t)=2\psi(\frac{t}{2})(\alpha+\beta t)$. ψ se prolongeant par continuité en une fonction de classe C^1 sur $[0;\pi]$, on en déduit le résultat.

2) On a $u_n=\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\alpha t+\beta t^2}{\sin(\frac{t}{2})}\times\sin((n+\frac{1}{2})t)dt=\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}h(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt$

h étant C^1 sur $[0;\pi]$ et en utilisant le résultat de la question 2 partie I, on en déduit par passage à la limite que

$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{\pi^2}{6}$

(b) On a $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{u_n}{4}+v_n$ donc $v_n=\frac{3u_n}{4}$.

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}v_n==\frac{\pi^2}{8}$

Remarque : ce sont des résultats classiques que l'on peut facilement retrouver grâce aux séries de Fourier.