Exercice 1.

1. Calculer les coefficients de Fourier associés à la périodisée f de la fonction $x \mapsto |x|$.
   Réponse
   $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-inx} dx.$
   Comme $|x|$ est une fonction paire on a $c_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx$.
   Donc $c_0(f) = \frac{1}{2}$ et par intégration par partie on obtient que

$$c_n(f) = \frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair et } n \neq 0 \\ -\frac{2}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

2. En déduire que pour $x \in [-\pi, \pi]$,

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos\left((2p+1)x\right)}{(2p+1)^2},$$

   Réponse :
   Comme la fonction f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on peut appliquer le théorème de Jordan-Dirichlet qui assure que la série de Fourier de f converge vers f en tout point de $[-\pi, \pi]$, d'où le résultat en utilisant le fait que $cos((2p+1)x) = \dfrac{e^{i(2p+1)x} + e^{-i(2p+1)x}}{2}$.

3. En déduire

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

   puis que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

   Réponse :
   Pour la première somme on prend $x = 0$ et on applique l'égalité de la

question 2.
Pour la seconde somme, comme $f \in L^2(\mathbb{T})$ on peut utiliser l'égalité de Parseval : $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$. Ce qui conduit directement à la solution.
Pour la troisième somme on remarque que

$$\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2} = \sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(2p)^2}$$

et donc que

$$\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2} = \sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2}$$

Ainsi

$$\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2} = \frac{4}{3}\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

d'où le résultat.
Pour la quatrième somme on procède de même en utilisant la deuxième et en séparant les termes pairs et impairs.

Exercice 2. Soient f, g deux fonctions 2π–périodiques continues. On note

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

1. Montrer que $f * g$ est continue 2π–périodique.
   Réponse :
   On utilise la périodicité de f pour montrer la périodicité de $f * g$:

   $$f*g(x+2\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+2\pi-y)g(y)\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x-y)g(y)\, dy = f*g(x).$$

   Comme f est uniformément continue et g est bornée on déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{h\to 0} f * g(x+h) - f * g(x) = 0$ et donc que f est continue.
2. Montrer que si, de plus, f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $f * g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.
   Réponse :
   Comme f' est continue, $\forall x \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f'(x-y)g(y)\, dy$ converge et $f'(x-y)g(y)$ est majoré par $\|f'\|_\infty g$ qui est intégrable donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, $f * g$ est dérivable et $(f * g)' = f' * g$. Comme f' et g sont continue et 2π périodique $f' * g$ est continue et 2π périodique et donc $f * g$ est $\mathcal{C}^1$.
   Que peut-on dire si f est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$?

Réponse :
Par récurrence sur k et en utisant les même arguments sur $f^{(k)}$ on montre que $f * g$ est $\mathcal{C}^k$.

3. Calculer les coefficients de Fourier de $f * g$ en fonction des coefficents de Fourier de f et de g.
Réponse :
Comme f et g sont continues sur des compacts on peut inverser les signes intégrales sans problèmes :

$$\begin{aligned}
c_n(f * g) &= \frac{1}{2\pi} \int_x \left(\frac{1}{2\pi} \int_y f(x-y) g(y)\, dy \right) e^{-inx}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_y g(y) e^{-iny} \left(\frac{1}{2\pi} \int_x f(x-y) e^{-in(x-y)}\, dx \right) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_y g(y) e^{-iny} \left(\frac{1}{2\pi} \int_u f(u) e^{-inu}\, du \right) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_y g(y) e^{-iny} c_n(f) dy \\
&= c_n(g) \times c_n(f).
\end{aligned}$$

4. Définissons f sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ et 0 sinon. Calculer $h = f * f$ et calculer les coefficients de Fourier de h.
Réponse :
D'abord remarquons que h est 2π périodique car convolution de deux fonctions 2π périodiques.

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) f(y)\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x-y)\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}} f(u)\, du.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant découper l'intégrale en deux suivant la valeur de f.

Si $x \in [-\pi, 0]$, $(x - \frac{\pi}{2}) \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ et $(x + \frac{\pi}{2}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ d'où :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(u)\, du + \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}} f(u)\, du. \\ &= 0 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}} f(u)\, du. \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}} 1\, du. \\ &= \frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

Si $x \in [0, \pi]$, $(x - \frac{\pi}{2}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $(x + \frac{\pi}{2}) \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ d'où par un calcul analogue, $h(x) = \frac{1-x}{2}$.
Ainsi h est une fonction continue, affine par morceaux.
Comme $c_n(h) = c_n(f)^2$, on peut calculer les $c_n(f)$ qui sont plus simples.

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-inx}\, dx$$

Ainsi $c_0(f) = \frac{1}{2}$ et si $n \neq 0$,

$$c_n(f) = \frac{1}{-2in\pi}\left((-i)^n - i^n\right)$$

Si n est pair on a $c_n(f) = 0$, si $n \equiv 1\,(4)$, $c_n(f) = \frac{1}{n\pi}$ et si $n \equiv 3\,(4)$, $c_n(f) = -\frac{1}{n\pi}$.
Donc $c_n(h) = 0$ si n est pair et $c_n(h) = \frac{1}{n^2\pi^2}$ si n est impair.