Exercice *(caractéristique d'un anneau)*

Soit A un anneau. On rappelle qu'il existe un unique morphisme d'anneaux (unitaires) φ_A de $\mathbf{Z}$ dans A. On appelle *caractéristique* de A l'unique entier naturel $n_A \in \mathbf{N}$ tels que $\ker \varphi_A = n_A\mathbf{Z}$.

1. Si A est intègre, prouver que n_A est soit 0, soit un nombre premier.

2. Donner un exemple d'anneau A non intègre avec n_A premier.

3. Soit p un nombre premier et soit A un anneau de caractéristique $n_A = p$. Prouver que l'application $F : A \to A$ définie par $F(x) = x^p$ est un morphisme d'anneaux. Est-ce vrai si n_A n'est pas premier ?

4. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

4-a. Prouver que n_B divise n_A et que $n_A = n_B$ si f est injective.

4-b. Si A est un corps, montrer que $n_A = n_B$.

5. Soient A et B deux anneaux.

5-a. Déterminer $n_{A\times B}$ en fonction de n_A et n_B.

5-b. En déduire que les anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/mn\mathbf{Z}$ sont isomorphes si m et n sont premiers entre eux.