Une urne contient n boules numérotées de 1 à n avec $n \geqslant 1$. On tire successivement et sans remise les n boules de l'urne en notant après chaque tirage le numéro de la boule tirée. On dit qu'il y a rencontre au rang k avec $1 \leqslant k \leqslant n$ si la k^{e} boule tirée porte le numéro k. On souhaite étudier la variable aléatoire X_n représentant le nombre total de rencontres au cours des n tirages. Si $A_k =$ "Il y a rencontre au rang k", on a

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{A_k}.$$

1) Déterminer l'ensemble des valeurs possibles prises par la variable aléatoire X_n.

2) Calculer l'espérance et la variance de X_n.

3) Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, calculer $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$.

4) Montrer avec la formule de Poincaré simplifiée que

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_n \geqslant 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

5) En déduire que, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}.$$

6) Conclure que (X_n) converge en loi vers X dont on précisera la loi.