Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On dit que α est *entier sur* $\mathbb{Z}$ s'il existe un polynôme unitaire $F(X) \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $F(\alpha) = 0$. Par exemple $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est entier sur $\mathbb{Z}$ puisque c'est une racine du polynôme $X^2 - X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ entier sur $\mathbb{Z}$. Soit $F(X) \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $F(\alpha) = 0$ et que $\deg F(X)$ soit minimal.

   (a) Montrer que $F(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

   (b) En déduire que $F(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ (cours) et que l'on a $F(X) = \mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}, X)$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que α est entier sur $\mathbb{Z}$ si et seulement si son polynôme minimal $\mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}, X)$ appartient à $\mathbb{Z}[X]$.

3. Soit $d \in \mathbb{N}$ un entier naturel qui ne soit pas un carré parfait. Soit

$$\alpha = \frac{(1 + \sqrt{d})}{2}.$$

   Déterminer le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$. En déduire que α est entier sur $\mathbb{Z}$ si et seulement si $d \equiv 1 \mod 4$.