Une urne contient des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes.

- La proportion de boules blanches est b.
- La proportion de boules rouges est r.
- La proportion de boules vertes est v.

Ainsi, on a.: $0 < b < l, \quad 0 < r < l, \quad 0 < v < 1 \quad$ avec $\quad b + r + v = 1$.
On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.
Pour tout entier naturel i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i ; V_i) l'événement " la i-ème boule tirée est blanche (respectivement, rouge ; verte)"
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Par exemple, lorsque le résultat des tirages est V_1, V_2, B_3, la variable aléatoire X prend la valeur 3.

Partie I

1. Préciser les valeurs possibles de X.
2. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \quad P(X = k) = (1 - b)\, b^{k-1} + (1 - r)\, r^{k-1} + (1 - v)\, v^{k-1}$
3. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{1}{1 - b} + \frac{1}{1 - r} + \frac{1}{1 - v} - 2$$

Partie II

On considère la fonction f de classe C^2 sur $]0,1[\times]0,1[$ définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,1[\times]0,1[,\ f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$$

1. Calculer, pour tout $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

2. Montrer qu'il existe un unique point I de $]0,1[\times]0,1[$ en lequel f est susceptible de posséder un extremum local et déterminer I.

3. Montrer que f admet en I un minimum local.

4. a) Exprimer $E(X)$ en fonction de $f(b,r)$.

   b) Que peut-on dire de $E(X)$ lorsque $b = r = v = \dfrac{1}{3}$?

Partie III

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

   On rappelle que $3^t = e^{t\ln(3)}$.

   On note $\alpha = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,dt$ et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t \in]-\infty; 2[\\ g(t) = \dfrac{1}{\alpha 3^t} & \text{si } t \in [2; +\infty[\end{cases}$$

2. Vérifier que g est une densité de probabilité.

   On note Y une variable aléatoire admettant g comme densité.

3. Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

4. On note Z la variable aléatoire égale à la partie entière de Y. On rappelle que la partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

   a) Déterminer la loi de probabilité de Z.

   b) Comparer la loi de probabilité de X lorsque $b = r = v = \dfrac{1}{3}$ et la loi de probabilité de Z.